

Polígonos y triángulos

31. Líneas quebradas.

Los segmentos de recta que no están sobre una misma recta se dice que forman una **línea quebrada** (Figuras 31 y 32) si el extremo final del primer segmento es el comienzo del segundo, el extremo final del segundo segmento es el comienzo del tercero y así sucesivamente. Estos segmentos se llaman los **lados** de la línea quebrada y los vértices de los ángulos formados por los segmentos adyacentes son sus **vértices**. Una línea quebrada se llama **convexa** si está en el mismo lado de la continuación infinita a ambos lados de cada uno de sus segmentos. Por ejemplo, la línea quebrada en la Figura 31 es convexa mientras que la de la Figura 32 no lo es (no queda a un lado de la recta BC).

Una línea quebrada cuyos extremos coinciden se llama **cerrada** (por ejemplo, las líneas $ABCDE$ o $ADCBE$ de la Figura 33). Una línea quebrada cerrada

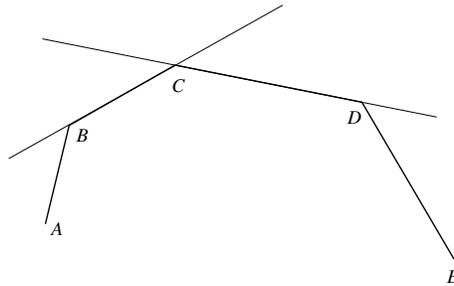


FIGURA 31

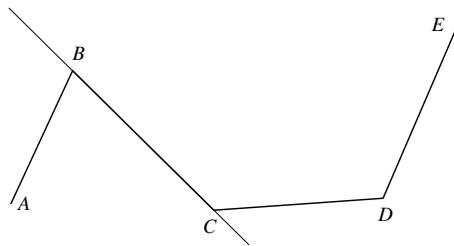


FIGURA 32

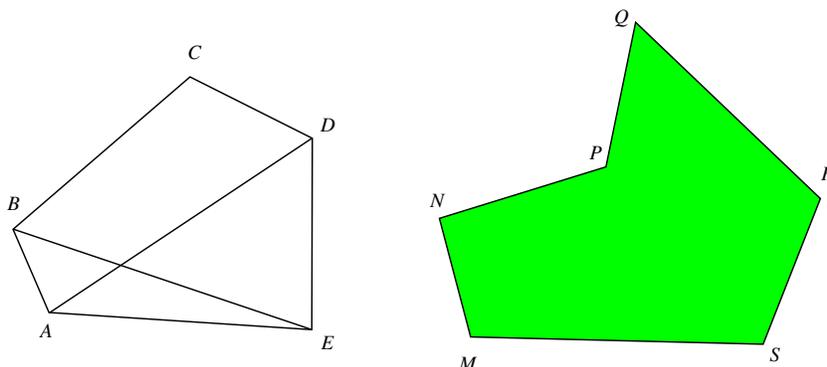


FIGURA 33

puede tener auto-intersecciones. Por ejemplo, en la Figura 33, la línea $ADCBE$ se auto-interseca, mientras que $ABCDE$ no.

32. Polígonos.

La figura formada por una línea quebrada cerrada y que no se auto-interseca junto con la parte del plano delimitada por esta línea se llama un **polígono** (Figura 33). Los lados y los vértices de esta línea quebrada se llaman los **lados** y los **vértices** del polígono, respectivamente, y los ángulos formados por cada dos lados adyacentes se llaman los **ángulos (interiores)** del polígono. Más precisamente, la parte de adentro de un ángulo del polígono se considera que es el lado que contiene la parte de adentro del polígono en la vecindad del vértice. Por ejemplo, el ángulo en el vértice P del polígono $MNPQRS$ es el ángulo mayor a $2d$ (con la parte de adentro sombreada en la Figura 33). La línea quebrada se llama la **frontera** del polígono y el segmento congruente a la suma de todos sus lados se llama el **perímetro**. A la mitad del perímetro a menudo se le refiere como el **semiperímetro**.

Un polígono se llama **convexo** si tiene como frontera una línea quebrada convexa. Por ejemplo, el polígono $ABCDE$ en la Figura 33 es convexo mientras que el polígono $MNPQRS$ no lo es. Consideraremos principalmente polígonos convexos.

Cualquier segmento (como AD , BE , MR , ..., Figura 33) que conecta dos vértices que no pertenecen al mismo lado del polígono se llama una **diagonal** del polígono.

El mínimo número posible de lados de un polígono es tres. Los polígonos se denominan de acuerdo al número de sus lados: **triángulos**, **cuadriláteros**, **pentágonos**, **hexágonos**, y así sucesivamente.

La palabra "triángulo" frecuentemente se reemplazará con el símbolo Δ .

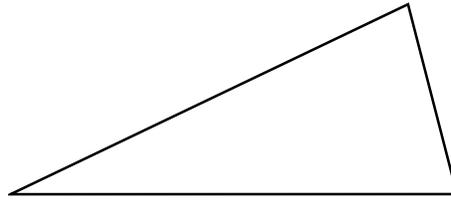


FIGURA 34

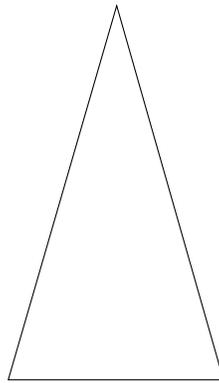


FIGURA 35

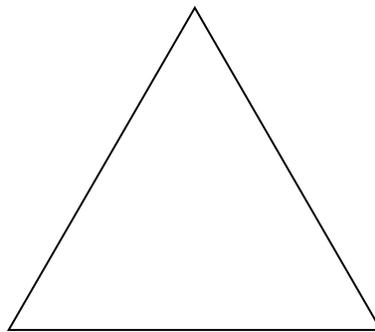


FIGURA 36

33. Tipos de triángulos.

Los triángulos se clasifican mediante las longitudes relativas de sus lados y mediante la magnitud de sus ángulos. Con respecto a las longitudes de sus lados, los triángulos pueden ser **escalenos** (Figura 34), cuando los tres lados tienen longitudes distintas, o **isósceles** (Figura 35), cuando dos lados son congruentes, o **equiláteros** (Figura 36), cuando sus tres lados son congruentes.

Con respecto a las magnitudes de sus ángulos, los triángulos pueden ser **acutángulos** (Figura 34), cuando sus tres lados son agudos, **rectángulo** (Figura 37),

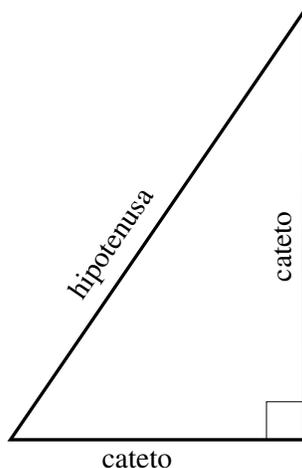


FIGURA 37

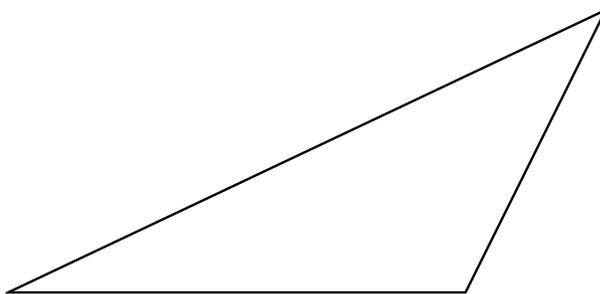


FIGURA 38

cuando entre sus ángulos hay uno que es recto, y **obtusángulo** (Figura 38), cuando entre sus ángulos hay uno que es obtuso.¹

En un triángulo rectángulo los lados del ángulo recto se llaman los **catetos** y el lado opuesto al ángulo recto se llama la **hipotenusa**.

34. Líneas importantes en un triángulo.

Uno de los lados de un triángulo frecuentemente se denomina como **la base** en cuyo caso el vértice opuesto se llama el **vértice** del triángulo y los otros dos lados se llaman **los lados**. Entonces la perpendicular tirada desde el vértice a la base, o a su continuación, se llama una **altura**. Luego si en el triángulo ABC (Figura 39) el lado AC se toma como la base, entonces B es el vértice y BD es la altura.

¹Veremos en el Apartado 43 que un triángulo puede tener cuando mucho un ángulo recto o un ángulo obtuso.

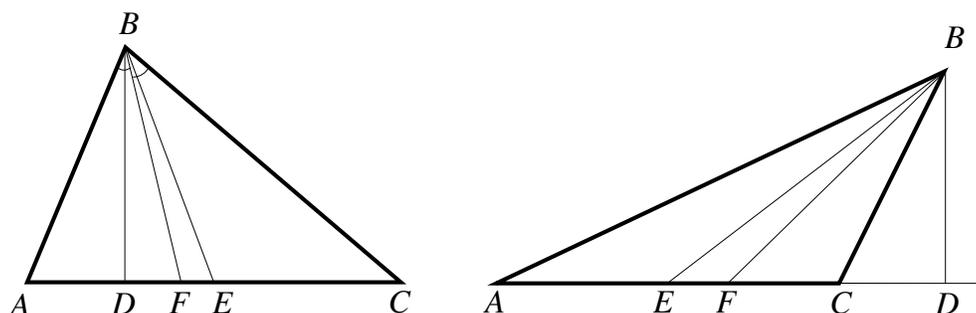


FIGURA 39

El segmento (BE , Figura 39) que conecta al vértice del triángulo con el punto medio de la base se llama una **mediana**. El segmento (BF) que divide al ángulo del vértice en mitades se llama una **bisectriz** del triángulo (que en general difiere de la mediana y de la altura).

Un triángulo tiene tres alturas, tres medianas y tres bisectrices ya que cada lado del triángulo puede tomar el papel de la base.

En un triángulo isósceles usualmente el lado distinto de los dos lados congruentes se llama la base. Respectivamente, el vértice de un triángulo isósceles es el vértice del ángulo formado por los lados congruentes.

Ejercicios.

- (1) Cuatro puntos en el plano son los vértices de tres cuadriláteros distintos. ¿Cómo puede ser eso?
- (2) ¿Puede una línea quebrada convexa auto-intersecarse?
- (3) ¿Será posible cubrir todo el plano con polígonos que no se enciman y tales que todos sus ángulos contienen 140° ?
- (4) Prueba que una diagonal de un cuadrilátero o bien está completamente en su parte de adentro o bien completamente en su parte de afuera. Da un ejemplo de un pentágono donde esto sea falso.
- (5) Prueba que una línea quebrada convexa y cerrada es la frontera de un polígono.
- (6) ¿Un triángulo equilátero puede considerarse isósceles? ¿Un triángulo isósceles puede considerarse escaleno?
- (7) ¿Cuántos puntos de intersección pueden tener tres rectas?
- (8) Prueba que en un triángulo rectángulo sus tres alturas pasan por un punto común.
- (9) Muestra que en cualquier triángulo cualesquiera dos de sus medianas se intersecan. ¿Es cierto lo mismo para cada dos bisectrices? ¿alturas?
- (10) Da un ejemplo de un triángulo tal que sólo una de sus alturas está en su parte de adentro.

